Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Г. Е. ШИЛОВ

КАК СТРОИТЬ ГРАФИКИ

*

ФИЗМАТГИЗ • 1959

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 30

Г. Е. ШИЛОВ

КАК СТРОИТЬ ГРАФИКИ

Ж919

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-3-1

АННОТАЦИЯ

Эта небольшая книжка написана на основе лекции, прочитанной автором в школьном математическом кружке при МГУ.

В ней излагаются простейшие приемы построения графиков функций на примерах прямой и обратной пропорциональной зависимостей и многочленов второй степени.

Показано, как, пользуясь этими графиками, строить графики более сложных функций.

Брошюра рассчитана на учащихся старших классов.

А синуса график, волна за волной,
По оси абсцисс убегает...

(Из студенческого фольклора)

Трудно найти область науки или общественной жизни, где не применялись бы графики. Всем нам неоднократно приходилось видеть, например, графики роста промышленного производства или производительности труда в СССР. Явления природы, как например суточные или годовые изменения температуры, атмосферного давления и т. д., также проще всего описать с помощью графика. Построение графиков такого рода не представляет труда, — была бы лишь заранее составлена соответствующая таблица. Мы будем говорить здесь о других графиках: о графиках, которые должны быть построены по данным математическим формулам. Потребность в таких графиках часто возникает в разных областях знания. Так, анализируя теоретически ход будущего физического процесса, ученый получает формулу, дающую некую интересующую его величину, например количество получающегося продукта в зависимости от времени. График, составленный по этой формуле, наглядно представит результаты будущего процесса. Возможно, что, глядя на этот график, ученый внесет существенные изменения в схему опыта, чтобы получить лучшие результаты.

Мы разберем в этой брошюре некоторые простые приемы построения графиков по заданным формулам.

Начертим на плоскости две взаимно-перпендикулярные прямые, горизонтальную и вертикальную, и обозначим через O их точку пересечения. Горизонтальную прямую назовем *осью абсцисс*, вертикальную — *осью ординат*. Каждая из осей делится точкой O на две полуоси, положительную и отрицательную, при этом правая полуось оси абсцисс и верхняя полуось оси ординат считаются положительными, а левая полуось оси абсцисс и нижняя полуось оси ординат считаются отрицательными. Положительные полуоси отметим стрелками. Местоположение каждой точки M на плоскости теперь можно определить парой чисел. Для этого опустим из точки M

перпендикуляры на каждую из осей; эти перпендикуляры отсекут на осях отрезки OA и OB (рис. 1). Длину отрезка OA, взятую со знаком $+$, если A лежит на положительной полуоси, и со знаком $-$, если A лежит на отрицательной полуоси, будем называть *абсциссой* точки M и обозначать через x. Аналогично длину отрезка OB (с тем же правилом знака) будем называть *ординатой* точки M и обозначать через y. Два числа x и y называются *координатами* точки M. Каждая точка на плоскости имеет какие-то координаты. Точки оси абсцисс имеют ординату, равную нулю, точки оси ординат имеют абсциссу, равную нулю. Начало координат O (точка пересечения осей) имеет обе координаты, равные нулю. Обратно, если даны любые два числа x и y любых знаков, то всегда можно построить точку M, имеющую абсциссу x и ординату y; для этого нужно на оси абсцисс отложить отрезок $OA = x$ и из точки A восставить перпендикуляр $AM = y$ (с учетом знаков); точка M и будет искомой.

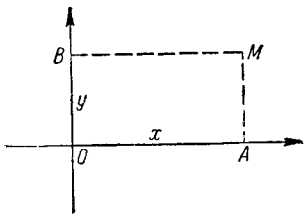


Рис. 1.

Пусть дана формула, для которой требуется построить график. В этой формуле должно быть указано, какие действия следует произвести над независимым переменным (обозначенным через x), чтобы получить значение интересующей нас величины (обозначаемой через y). Например, формула

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

показывает, что для получения значений величины y нужно независимое переменное x возвести в квадрат, прибавить единицу и единицу разделить на полученный результат. Если x принимает какое-либо числовое значение x_0, то по нашей формуле и y примет некоторое числовое значение y_0. Числа x_0 и y_0 определяют некоторую точку M_0 в плоскости чертежа. Вместо x_0 можно затем взять другое число x_1 и по формуле сосчитать новое значение y_1; пара чисел (x_1, y_1) определит новую точку M_1 на плоскости. Геометрическое место *всех* точек, ордината которых связана с абсциссой данной формулой, и называется *графиком*, отвечающим этой формуле.

Совокупность точек графика, вообще говоря, бесконечна, и мы не можем рассчитывать фактически построить по ука-

занному правилу их все без исключения. Но мы обойдемся без этого. В большинстве случаев достаточно некоторого небольшого числа точек, чтобы иметь возможность судить об общем виде графика.

Способ построения графика «по точкам» состоит именно в том, что намечают некоторое число точек графика и соединяют эти точки (по возможности) плавной линией.

В качестве примера рассмотрим график функции

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (1)$$

Составим следующую таблицу:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

В первую строку мы занесли значения $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ -3$. Чаще всего выбирают для x целые значения, так

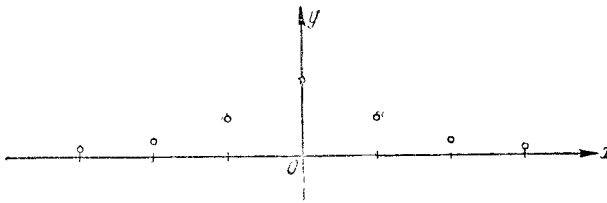


Рис. 2.

как с ними легче вычислять. Во второй строке записаны соответствующие значения y, найденные из формулы (1). Отметим

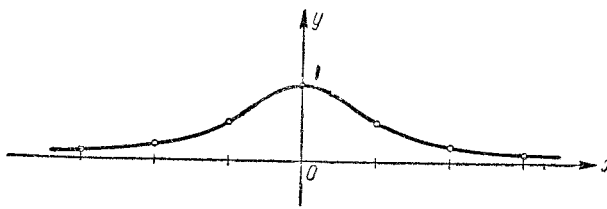


Рис. 3.

соответствующие точки на плоскости (рис. 2). Соединяя их плавной линией, получаем график (рис. 3).

Правило построения «по точкам», как мы видим, чрезвычайно просто и не требует никакой «науки». Но тем не менее, может быть именно поэтому, слепое следование правилу «по точкам» может привести к большим ошибкам.

Построим «по точкам» кривую, данную уравнением

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \qquad (2)$$

Таблица значений x и y, соответствующая этому уравнению, следующая:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Соответствующие точки на плоскости показаны на рис. 4. Этот чертеж весьма похож на только что приведенный;

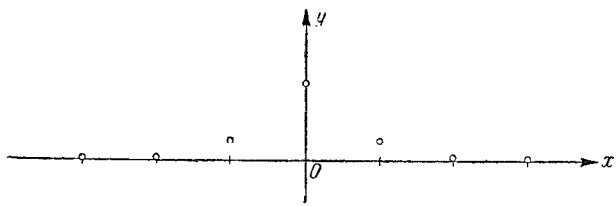


Рис. 4.

соединяя отмеченные точки плавной кривой, мы получаем график (рис. 5). Кажется, на этом можно было бы положить

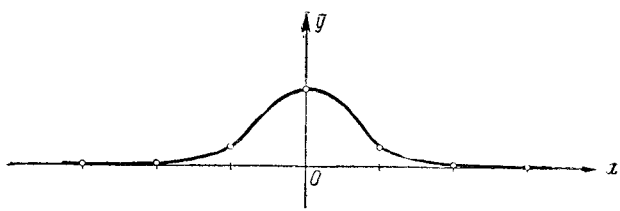


Рис. 5.

карандаш и успокоиться: искусство строить графики нами постигнуто! Но все-таки для контроля вычислим y для какого-нибудь промежуточного значения x, например $x = 0{,}5$. Вычис-

ляем и получаем неожиданный результат: при $x = 0{,}5$ значение $y = 16$. Это резко не соответствует нашему чертежу. И мы не гарантированы, что при вычислении y для других промежуточных значений x — а их ведь бесконечное множество — не получится еще больших несообразностей. Должно быть имеется что-то недостаточно обоснованное в самом способе построения графиков «по точкам».

* * *

Далее мы рассмотрим другой способ построения графиков, более надежный в смысле предохранения от неожиданностей, подобных той, с которой мы только что встретились. По этому способу — назовем его, например, «по действиям» — нужно произвести непосредственно на графиках все те действия, которые записаны в данной нам формуле — сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.

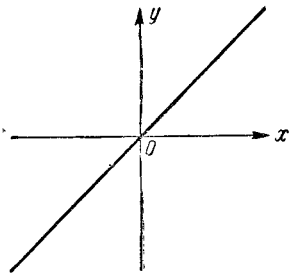


Рис. 6.

Рассмотрим несколько простейших примеров. Построим график, отвечающий уравнению

$$y = x. \qquad (3)$$

Это уравнение говорит, что все точки искомой линии графика имеют равные абсциссы и ординаты. Геометрическое место точек, имеющих ординату, одинаковую с абсциссой, есть биссектриса угла между положительными полуосями и угла между отрицательными полуосями (рис. 6).

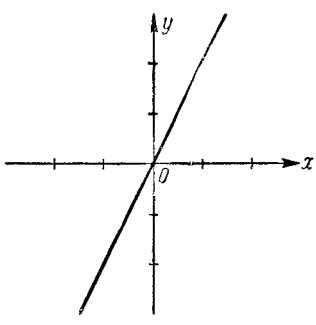


Рис. 7.

График, отвечающий уравнению

$$y = kx$$

с некоторым коэффициентом k, получается из предыдущего умножением каждой ординаты на одно и то же число k. Пусть, например, $k = 2$; каждую ординату предыдущего графика нужно удвоить, и в результате мы получим прямую, более круто поднимающуюся кверху (рис. 7). С каждым шагом вправо по оси x новая прямая поднимается на два шага

вверх по оси y. Между прочим, это позволит легко выполнить построение на клетчатой или миллиметровой бумаге. В общем случае уравнения $y = kx$ также получится прямая. Если $k > 0$, то с каждым шагом вправо она будет подниматься на k шагов вверх по оси y. Если $k < 0$, то прямая будет не подниматься, а опускаться.

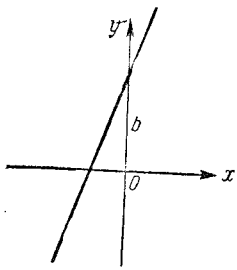


Рис. 8.

Рассмотрим теперь несколько более сложную формулу

$$y = kx + b. \qquad (4)$$

Чтобы построить соответствующий график, нужно к каждой ординате уже известной линии $y = kx$ прибавить одно и то же число b. При этом вся прямая $y = kx$ сдвинется, как целое, по плоскости вверх на b единиц (при $b > 0$; при $b < 0$ исходная прямая, естественно, не поднимается, а опускается). В результате получится прямая, параллельная исходной, но уже не проходящая через начало координат, а отсекающая на оси ординат отрезок b (рис. 8).

Итак, график любого многочлена 1-й степени от x есть некоторая прямая, которая строится по указанным правилам. Переходим к графикам многочленов 2-й степени.

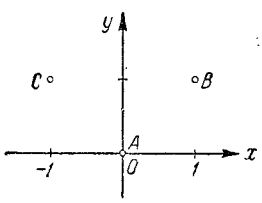


Рис. 9.

Рассмотрим формулу

$$y = x^2. \qquad (5)$$

Ее можно представить в форме

$$y = y_1^2,$$

где

$$y_1 = x.$$

Иными словами, искомый график получится, если каждую ординату уже известной нам линии $y = x$ возвести в квадрат. Выясним, что́ при этом должно получиться.

Поскольку $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$, мы получаем три опорные точки A, B, C (рис. 9). Когда $x > 1$, то $x^2 > x$; поэтому справа от точки B график пойдет выше биссектрисы координатного угла (рис. 10). Когда $0 < x < 1$, то $0 < x^2 < x$; поэтому между точками A и B график идет ниже биссектри-

сы. Более того, мы утверждаем, что при подходе к точке A график входит в любой угол, ограниченный сверху прямой

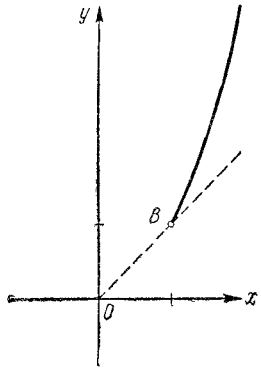


Рис. 10.

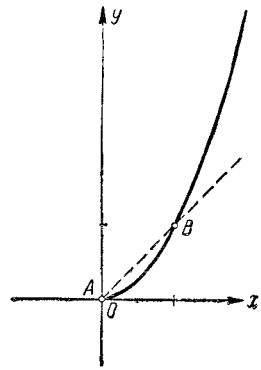


Рис. 11.

$y = kx$ (с как угодно малым k), а снизу — осью x; действительно, неравенство

$$x^2 < kx$$

выполняется, если только $x < k$. Этот факт означает, что искомая кривая *касается* в точке O оси абсцисс (рис. 11). Пойдем теперь по оси x влево от точки O. Мы знаем, что числа $-a$ и $+a$ при возведении в квадрат дают один и тот же результат ($+a^2$). Таким образом, ордината нашей кривой при $x = -a$ будет та же, что и при $x = +a$. Геометрически это означает, что график нашей кривой в левой полуплоскости будет получаться отражением имеющегося уже графика в правой полуплоскости относительно оси ординат.

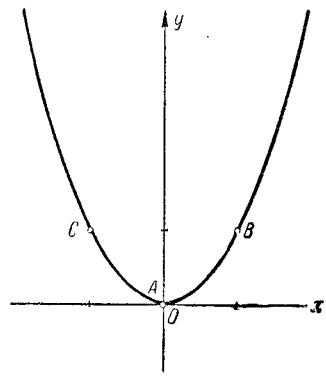


Рис. 12.

Мы получаем кривую, которая называется *параболой* (рис. 12).

Теперь, действуя так же, как и выше, можно построить более сложную кривую

$$y = ax^2 \qquad (6)$$

и еще более сложную

$$y = ax^2 + b. \qquad (7)$$

Первая из них получается умножением всех ординат параболы (5) — мы будем называть ее *стандартной параболой* — на число a.

При $a > 1$ получится похожая кривая, но более круто поднимающаяся кверху. (рис. 13).

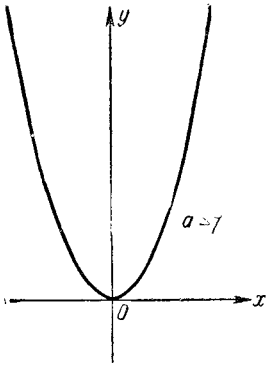


Рис. 13.

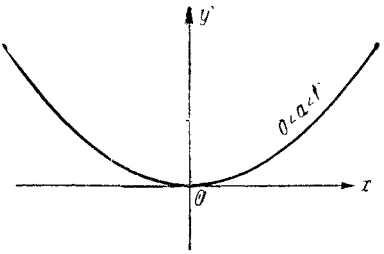


Рис. 14.

При $0 < a < 1$ кривая будет более пологой (рис. 14), а при $a < 0$ ее ветви опрокинутся вниз (рис. 15). Кривая (7)

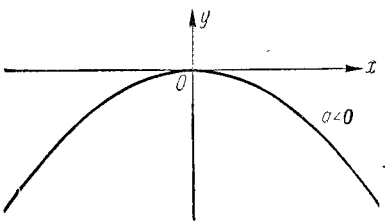


Рис. 15.

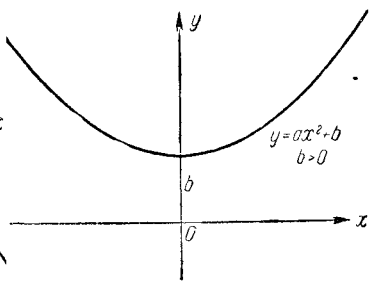


Рис. 16.

получится из кривой (6) сдвигом ее кверху на отрезок b, если $b > 0$ (рис. 16). Если же $b < 0$, то сдвигать кривую придет-

ся не вверх, а вниз (рис. 17). Все эти кривые также называются параболами.

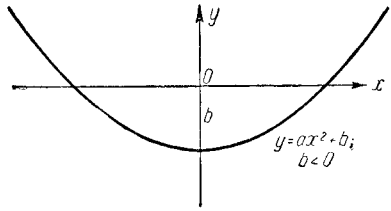


Рис. 17.

Приведем несколько более сложный пример на построение графиков методом умножения. Пусть задано построить график по уравнению

$$y = x(x-1)(x-2)(x-3). \qquad (8)$$

Здесь дано произведение четырех множителей. Нарисуем график каждого из них в отдельности: все они — прямые, параллельные биссектрисе координатного угла и отсекающие на оси ординат отрезки соответственно: 0, —1, —2, —3 (рис. 18).

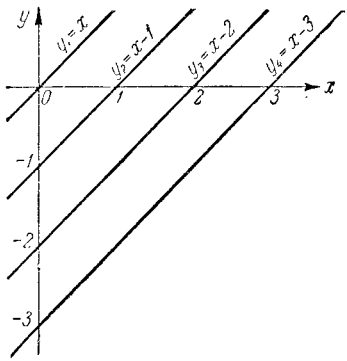


Рис. 18.

В точках 0, 1, 2, 3 на оси x искомая кривая будет иметь ординату 0, так как произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. В других местах произведение будет отличным от нуля и будет иметь знак, который легко найти по знакам множителей. Так, справа от точки 3 все множители положительны, следовательно, и произведение положительно. Между точками 2 и 3 один множитель

отрицателен, поэтому произведение отрицательно. Между точками 1 и 2 два отрицательных множителя, поэтому произведение положительно, и т. д. Мы получаем следующее расположение знаков произведения (рис. 19). Справа от точки 3 все множители при увеличении x возрастают, следовательно, и произведение будет возрастать, и притом очень быстро. Слева от точки O все множители возрастают в отрицательную сторону, поэтому произведение (оно положительно) также быстро возрастает.

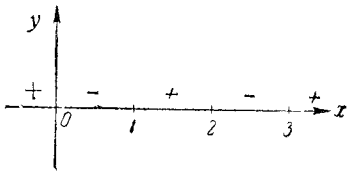


Рис. 19.

Теперь легко набросать и общий вид графика (рис. 20).

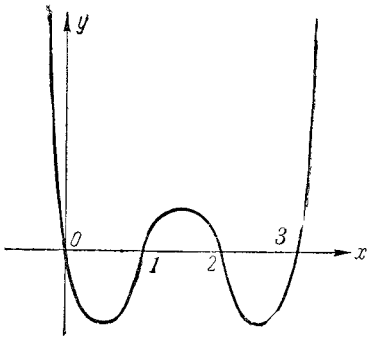


Рис. 20.

До сих пор мы использовали действия сложения и умножения. Теперь добавим к ним деление. Построим кривую

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

Для этого построим в отдельности графики числителя и знаменателя. График числителя

$$y_1 = 1$$

есть прямая, параллельная оси абсцисс, на высоте 1. График знаменателя

$$y_2 = x^2 + 1$$

есть стандартная парабола, сдвинутая на 1 вверх. Оба эти графика показаны на рис. 21.

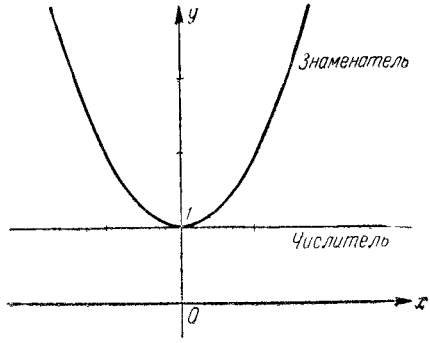


Рис. 21.

Будем теперь производить деление каждой ординаты числителя на соответствующую (т. е. взятую при том же x) ординату знаменателя. Когда $x=0$, мы видим, что $y_1=y_2=1$, откуда и $y=1$. При $x\neq 0$ числитель меньше знаменателя и частное меньше 1. Так как числитель и знаменатель всюду положительны, то и частное положительно, следовательно, график проходит в полосе, ограниченной осью абсцисс и прямой $y=1$. Когда x неограниченно увеличивается, тогда знаменатель неограниченно увеличивается, а числитель остается постоянным; поэтому частое стремится к нулю. Все это приводит

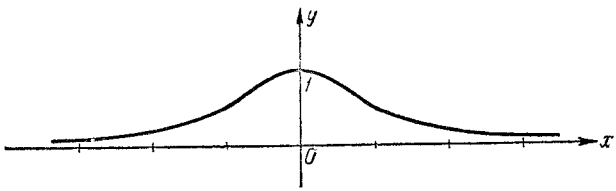


Рис. 22.

к следующему графику частного (рис. 22). Чертеж получается такой же, какой мы построили по точкам (стр. 5).

При графическом делении особую роль играют те значения x, при которых знаменатель обращается в нуль. Если числитель при этом не обращается в нуль, то частное уходит в бесконечность. Для примера изобразим кривую

$$y=\frac{1}{x}. \qquad (10)$$

Здесь графики числителя и знаменателя нам уже известны (рис. 23). При $x=1$ мы имеем $y_1=y_2=1$, откуда и $y=1$. При $x>1$ числитель меньше знаменателя, частное меньше 1, как и в предыдущем примере; когда x неограниченно увеличивается, частное приближается к нулю, и мы получаем участок графика, соответствующий значениям $x>1$ (рис. 24).

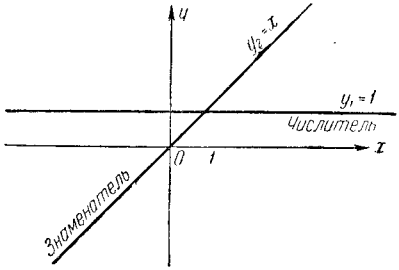


Рис. 23.

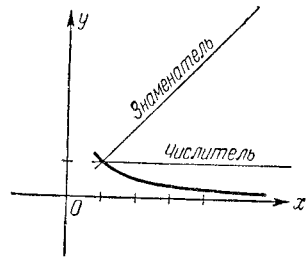


Рис. 24.

Рассмотрим теперь область значений x между 0 и 1. Когда x от 1 приближается к нулю, знаменатель стремится к нулю, в то время как числитель остается равным 1. Поэтому частное неограниченно увеличивается, и мы получаем ветвь, уходящую в бесконечность (рис. 25). При $x<0$ знаменатель, а с ним и вся дробь становятся отрицательными. Общий ход графика представлен на рис. 26. Теперь мы уже

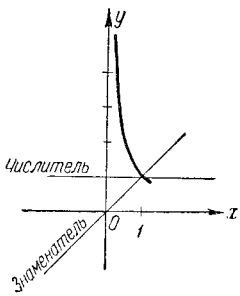


Рис. 25.

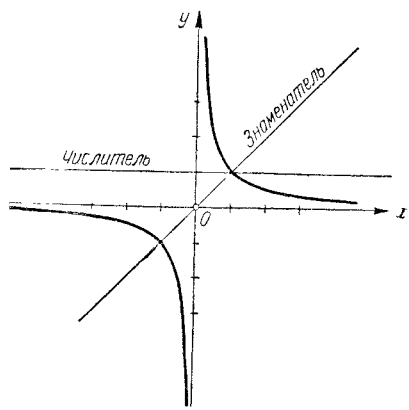


Рис. 26.

можем приняться по-настоящему за построение графика кривой, о которой шла речь в начале:

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \qquad (11)$$

Будем сначала строить график знаменателя. Кривая $y_1 = 3x^2$ есть «утроенная» стандартная парабола (рис. 27). Вычитание

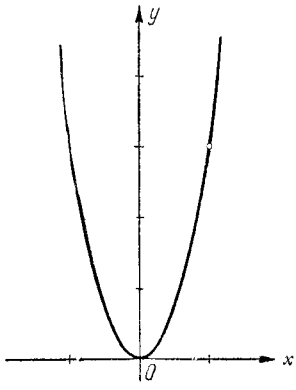


Рис. 27.

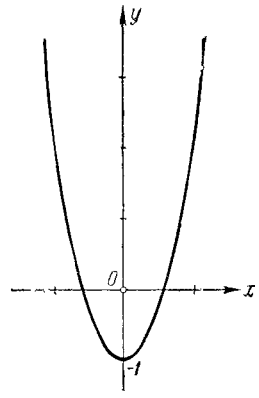


Рис. 28.

единицы означает спуск графика на одну единицу вниз (рис. 28). Кривая пересекает ось x в двух точках, которые мы легко найдем, приравнивая $3x^2 - 1$ нулю:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,\ 577\ldots$$

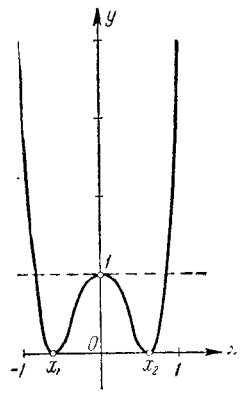


Рис. 29.

Возведем полученный график в квадрат. В точках x_1 и x_2 ординаты останутся равными нулю. Все остальные ординаты будут положительными, так что график будет проходить выше оси абсцисс. В точке $x = 0$ ордината будет равна $(-1)^2 = 1$, и это будет наибольшая ордината на участке от x_1 до x_2. Вне этого участка кривая будет в обе стороны круто подниматься кверху (рис. 29).

Теперь график знаменателя построен. На этом же чертеже мы показали пунктиром и график числителя $y_4 = 1$. Остается теперь разделить числитель на знаменатель. Так как

числитель и знаменатель всюду одного знака, то частное будет положительным и весь график пройдет выше оси абсцисс. При $x = 0$ числитель и знаменатель равны, их отношение

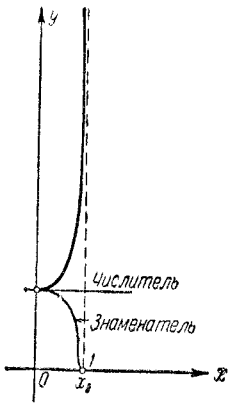


Рис. 30.

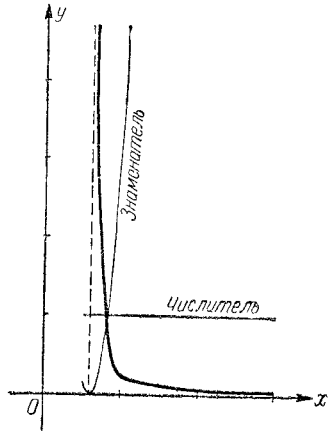


Рис. 31.

равно 1. Пойдем по оси абсцисс вправо от точки O. Числитель остается равным 1, а знаменатель уменьшается; следовательно, частное *увеличивается* от значения 1. Когда мы

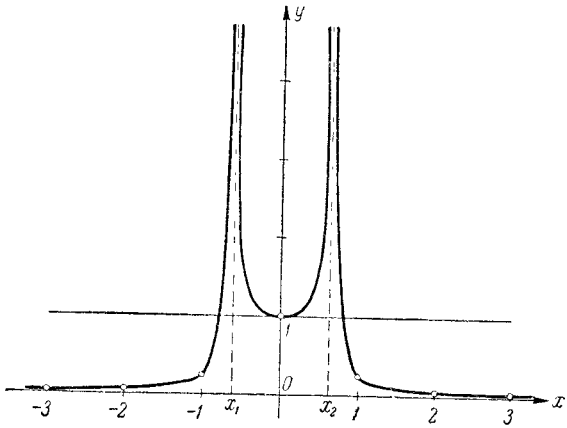


Рис. 32.

дойдем до значения $x_2 = 0{,}577\ldots$, знаменатель станет равным нулю. Это означает, что частное к этому моменту уйдет в бесконечность (рис. 30). За точкой x_2 знаменатель быстро

пройдет в обратную сторону путь от значения 0 до значения 1 и далее начнет неограниченно возрастать. Частное, наоборот, из бесконечности вернется к 1, пересечет прямую $y=1$ в той же точке, где и y_3, и далее будет неограниченно приближаться к нулю (рис. 31).

Точно такая же картина получается с левой стороны от оси ординат (рис. 32).

Мы отметили на этом графике точки, соответствующие целым значениям $x=0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Это те самые точки, которые мы намечали при построении графика «по точкам» на стр. 6. Но действительный ход графика сильно отличается от того, который был предложен на рис. 5. Мы видим, что в действительности вместо того чтобы плавно спускаться от значения 1 (при $x=0$) к значению $\frac{1}{4}$ (при $x=1$) и далее, кривая уходит вверх в бесконечность. Мы можем увидеть здесь же и точку с координатами $x=\frac{1}{2}$, $y=16$, которая никак не умещалась на прежнем, неправильном графике, но очень хорошо умещается на новом, правильном.

* * *

Резюмируем в заключение общие правила, которых следует придерживаться при построении графиков «по действиям»:

а) Все операции, заключенные в заданной формуле, следует произвести над графиками, идя от более простых к более сложным.

б) При умножении графиков обратить внимание на точки, где множители обращаются в нуль (хотя бы один из них); между этими точками помнить правило знаков.

в) При делении графиков обратить внимание на точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Если числитель в этих точках не равен нулю, ветви кривой уйдут в бесконечность — вверх или вниз, в зависимости от знаков числителя и знаменателя.

г) Обратить внимание на поведение кривой при x, уходящем неограниченно вправо ($к+\infty$) или влево ($к-\infty$).

Мы рассказали здесь только о простейших операциях, которые можно производить с графиками. Точнее говоря, мы отправлялись от простейшего уравнения $y=x$ и применяли далее четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. К этим операциям можно было бы без

труда присоединить и алгебраическую операцию — извлечение корня.

Но и более сложные операции — тригонометрические и логарифмические — также можно производить с графиками. Нужно только знать графики, соответствующие простейшим уравнениям $y = \sin x$ (рис. 33) и $y = \log\ x$ (рис. 34).

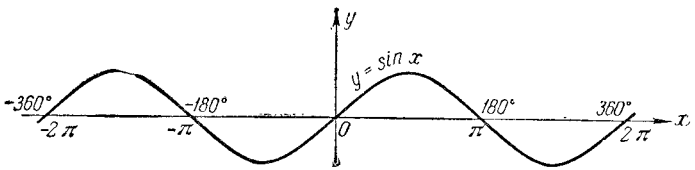


Рис. 33.

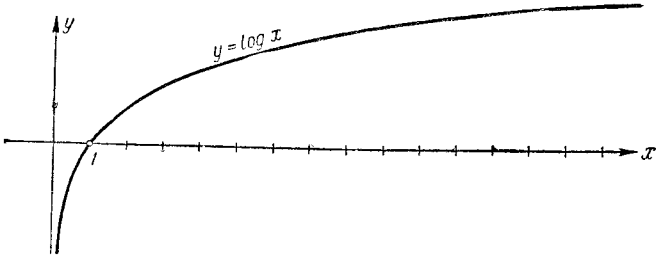


Рис. 34.

Применяя описанные выше приемы, можно строить графики по любым уравнениям, содержащим знаки sin, log и арифметические и алгебраические действия.

Очень полезно научиться строить самые разнообразные графики. Но с помощью указанных выше приемов мы не сможем ответить на многие естественные вопросы, которые возникают при рассмотрении того или иного графика. Например, на некотором графике мы видим, что кривая, поднимавшаяся до некоторого значения y_0, затем начинает опускаться; она, как говорят, достигает в точке x_0 максимального значения y_0. Каково точное значение x_0 — мы, может быть, и не сумеем сказать при ограниченном арсенале наших средств. Далее, нас может интересовать, под каким углом пересекает кривая ось x или ось y; в какую сторону обращена ее выпуклость и т. п. И на эти вопросы наши методы не могут дать точного ответа. Здесь требуется уже более серьезное

владение математической техникой. Методы, которыми исследуются указанные свойства графиков, содержатся в том разделе математики, который называется «дифференциальное исчисление».

* * *

В заключение — несколько задач на графики.

Начертить графики по следующим уравнениям:

1. $y = x^2 + x + 1$.

2. $y = x(x^2 - 1)$.

3. $y = x^2(x - 1)$.

4. $y = x(x-1)^2$.

5. $y = \frac{x}{x-1}$.

Указание. Выделить целую часть: $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

6. $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Указание. Выделить целую часть.

7. $y = \frac{x^3}{x-1}$.

Указание. Выделить целую часть.

8. $y = \pm\sqrt{x}$.

Указание. Квадратный корень из отрицательных чисел в вещественной области не существует.

9. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Как доказать, что полученная кривая есть окружность?

Указание. Вспомнить определение окружности и теорему Пифагора.

10. $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$.

Доказать, что верхняя ветвь кривой при $x \to \infty$ неограниченно приближается к биссектрисе координатного угла.

Указание. $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

11. $y = \pm x\sqrt{x(1-x)}$.

12. $y = \pm x^2\sqrt{1-x}$.

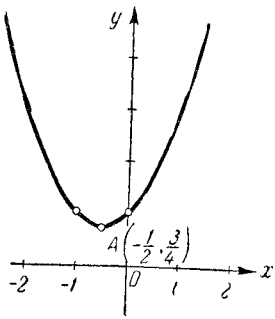
13. $y = \frac{1 - x^2}{2 \pm \sqrt{1 - x^2}}$.

14. $y = x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

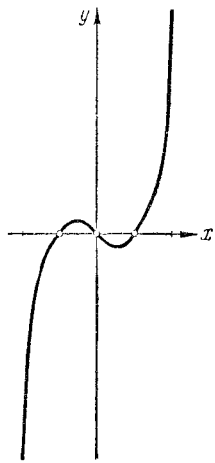
ЛИТЕРАТУРА

Энциклопедия элементарной математики, книга 3, Гостехиздат, 1952, статья Б. Л. Гончарова «Элементарные функции», гл. 1 и 2.

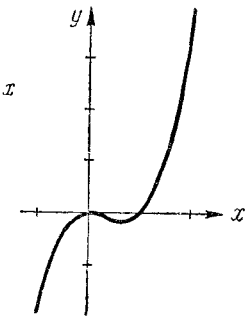
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ



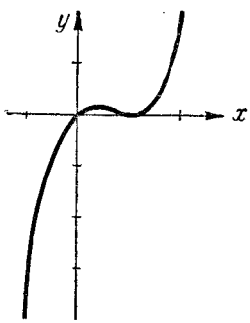
К задаче 1.



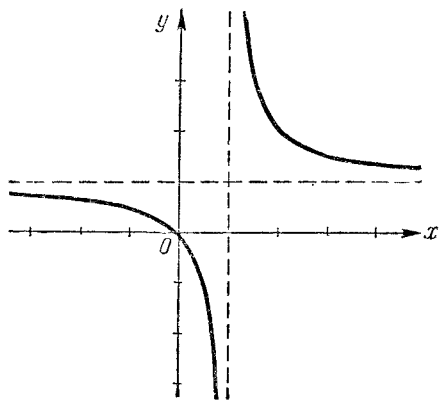
К задаче 2.



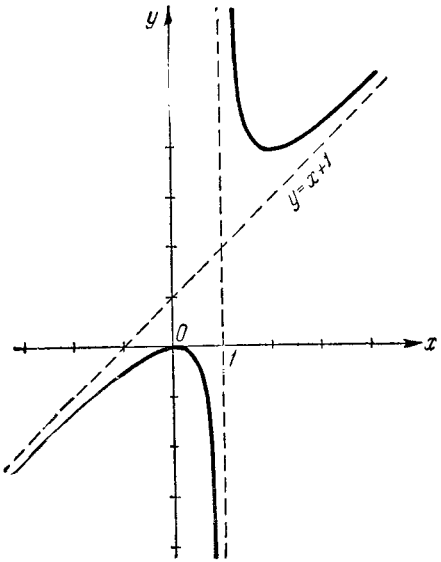
К задаче 3.



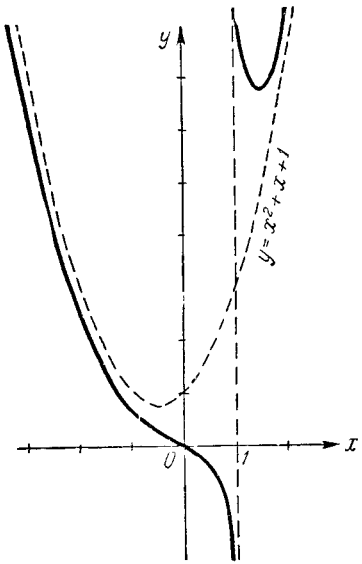
К задаче 4.



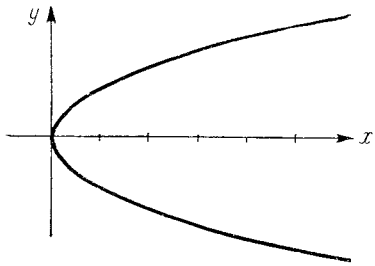
К задаче 5.



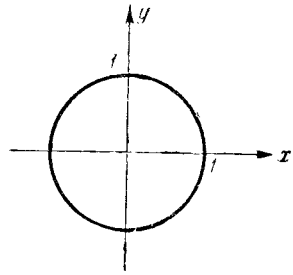
К задаче 6.



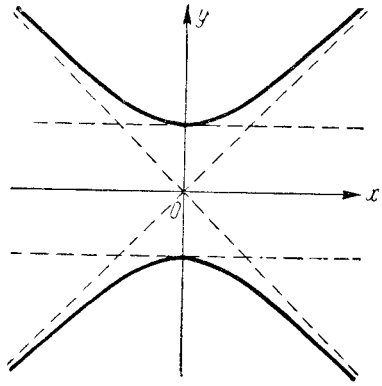
К задаче 7.



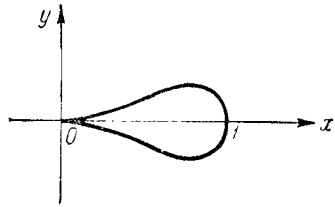
К задаче 8.



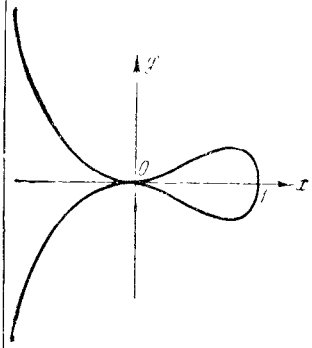
К задаче 9.



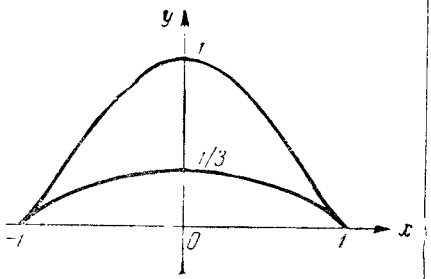
К задаче 10.



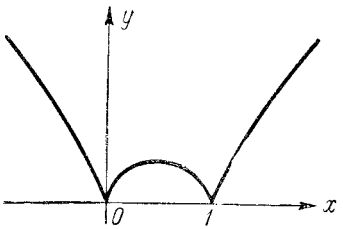
К задаче 11.



К задаче 12.



К задаче 13.



К задаче 14.

Шилов Георгий Евгеньевич.
Как строить графики.

Редактор *Н. А. Угарова.*

Технический редактор *К. Ф. Брудно.*
Корректор *А. С. Каган.*

Сдано в набор 27/X 1958 г. Подписано к печати 31/XII 1958 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 0,75. Услови. печ. л. 1,23. Уч.-изд. л. 1,15. Тираж 50 000 экз. Т-11576. Цена книги 35 коп. Заказ № 2425.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского Совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.